第8講　接線の本数と実数解の個数

8　次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ とする．曲線 C_1：$y=f(x)$ について，点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線を l_p，点 $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ における接線を l_q とする．$p\neq q$ のとき，l_p と l_q が一致することはないことを示せ．

(2)　曲線 C_2：$y=x^4-2x^3-3x^2+3x+5$ に対し，曲線上の異なる 2 点における接線が一致しているという．この 2 点の x 座標を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　接線の本数と実数解の個数

8　点 $(X,\ Y)$ から曲線 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ に引いた接線の本数を求めよ．

【選択肢】

㋐
1　：$Y>\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ かつ $Y>aX^3+bX^2+cX+d$
または「$Y<\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ かつ $Y<aX^3+bX^2+cX+d$」のとき
2　：$Y=\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ または $Y=aX^3+bX^2+cX+d$ のとき
3　：$\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d<Y<aX^3+bX^2+cX+d$
または $aX^3+bX^2+cX+d<Y<\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ のとき

㋑
1　：$Y>\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ かつ $Y>aX^3+bX^2+cX+d$
または「$Y<\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ かつ $Y<aX^3+bX^2+cX+d$」のとき
2　：$X\neq -\dfrac{b}{3a}$ かつ
「$Y=\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ または $Y=aX^3+bX^2+cX+d$」のとき
3　：$\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d<Y<aX^3+bX^2+cX+d$
または $aX^3+bX^2+cX+d<Y<\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ のとき

㋒
1　：$X=-\dfrac{b}{3a}$
または「$Y>\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ かつ $Y>aX^3+bX^2+cX+d$」
または「$Y<\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ かつ $Y<aX^3+bX^2+cX+d$」のとき
2　：$X\neq -\dfrac{b}{3a}$ かつ
「$Y=\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ または $Y=aX^3+bX^2+cX+d$」のとき
3　：$\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d<Y<aX^3+bX^2+cX+d$
または $aX^3+bX^2+cX+d<Y<\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ のとき

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第8講　接線の本数と実数解の個数

8　次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ とする．曲線 C_1：$y=f(x)$ について，点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線を l_p，点 $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ における接線を l_q とする．$p\neq q$ のとき，l_p と l_q が一致することはないことを示せ．

(2)　曲線 C_2：$y=x^4-2x^3-3x^2+3x+5$ に対し，曲線上の異なる2点における接線が一致しているという．この2点の x 座標を求めよ．

【答】 (1) 略　(2) $x=-1,\ 2$

【解答】

(1)　$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ より $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ となるので，点Pにおける接線は

$$y=(3ap^2+2bp+c)(x-p)+ap^3+bp^2+cp+d$$

ゆえに　$$y=(3ap^2+2bp+c)x-2ap^3-bp^2+d$$

点Qにおける接線も同様に，$y=(3aq^2+2bq+c)x-2aq^3-bq^2+d$ となる．

これら2つの接線が一致する，つまり

$$\begin{cases} 3ap^2+2bp+c=3aq^2+2bq+c & \cdots\cdots① \\ -2ap^3-bp^2+d=-2aq^3-bq^2+d & \cdots\cdots② \end{cases}$$

が成り立つとすると，①より $(p-q)\{3a(p+q)+2b\}=0$ となるが，

$p\neq q$ より $3a(p+q)+2b=0$，ゆえに　$p+q=-\dfrac{2b}{3a}$　……③　を得る．

また $p\neq q$ と②より $(p-q)\{-2a(p^2+pq+q^2)-b(p+q)\}=0$，ゆえに $-2a(p^2+pq+q^2)-b(p+q)=0$ となるが，この式は $-2a\{(p+q)^2-pq\}-b(p+q)=0$ と変形できるため，この式に③を代入すると

$$-2a\left\{\left(-\frac{2b}{3a}\right)^2-pq\right\}-b\left(-\frac{2b}{3a}\right)=0$$

よって　$pq=\dfrac{b^2}{9a^2}$　……④　を得る．

③と④より，p と q は $x^2+\dfrac{2b}{3a}x+\dfrac{b^2}{9a^2}=0$ すなわち $\left(x+\dfrac{b}{3a}\right)^2=0$ の2解となるが，

$p=q=-\dfrac{b}{3a}$ (重解) となり，これは $p\neq q$ に矛盾．

よって l_p と l_q が一致することはない．

(2)　実数 p，q を $p<q$ であるとする．$y=x^4-2x^3-3x^2+3x+5$ より

$y'=4x^3-6x^2-6x+3$ となるので，$x=p$ における接線は

$$y=(4p^3-6p^2-6p+3)(x-p)+p^4-2p^3-3p^2+3p+5$$

すなわち $y=(4p^3-6p^2-6p+3)x-3p^4+4p^3+3p^2+5$ となる．

同様に $x=q$ における接線は，$y=(4q^3-6q^2-6q+3)x-3q^4+4q^3+3q^2+5$

この2つの接線が一致するとき

$$\begin{cases} 4p^3-6p^2-6p+3=4q^3-6q^2-6q+3 & \cdots\cdots① \\ -3p^4+4p^3+3p^2+5=-3q^4+4q^3+3q^2+5 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

が成り立つ．

ここで $p\neq q$ より，①は $4\{(p+q)^2-pq\}-6(p+q)-6=0$

②は $-3(p+q)\{(p+q)^2-2pq\}+4\{(p+q)^2-pq\}+3(p+q)=0$ となるので，

$p+q=s$，$pq=t$ とおくと，これら２式はそれぞれ

$$4(s^2-t)-6s-6=0 \quad \cdots\cdots③ \qquad -3s(s^2-2t)+4(s^2-t)+3s=0 \quad \cdots\cdots④$$

となる．

③より $t=s^2-\dfrac{3}{2}s-\dfrac{3}{2}$ となるが，これを④に代入して整理すると

$(s-1)(s^2-2s-2)=0$　したがって $s=1,\ 1\pm\sqrt{3}$ を得る．

$s=1$ のとき $t=-2$　これらより $p=-1,\ q=2$

$s=1-\sqrt{3}$ のとき $t=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$　これらより $p=q=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ となり不適．

$s=1+\sqrt{3}$ のとき $t=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$　これらより $p=q=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ となり不適．

以上より求める x 座標は　$\boldsymbol{x=-1,\ 2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　接線の本数と実数解の個数

8　点 $(X,\ Y)$ から曲線 $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ に引いた接線の本数を求めよ．

【選択肢】

㋐
1　：$Y>\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ かつ $Y>aX^3+bX^2+cX+d$

または「$Y<\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ かつ $Y<aX^3+bX^2+cX+d$」のとき

2　：$Y=\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ または $Y=aX^3+bX^2+cX+d$ のとき

3　：$\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d<Y<aX^3+bX^2+cX+d$

または $aX^3+bX^2+cX+d<Y<\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ のとき

㋑
1　：$Y>\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ かつ $Y>aX^3+bX^2+cX+d$

または「$Y<\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ かつ $Y<aX^3+bX^2+cX+d$」のとき

2　：$X\neq-\dfrac{b}{3a}$ かつ

「$Y=\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ または $Y=aX^3+bX^2+cX+d$」のとき

3　：$\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d<Y<aX^3+bX^2+cX+d$

または $aX^3+bX^2+cX+d<Y<\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ のとき

㋒
1　：$X=-\dfrac{b}{3a}$

または「$Y>\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ かつ $Y>aX^3+bX^2+cX+d$」

または「$Y<\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ かつ $Y<aX^3+bX^2+cX+d$」のとき

2　：$X\neq-\dfrac{b}{3a}$ かつ

「$Y=\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ または $Y=aX^3+bX^2+cX+d$」のとき

3　：$\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d<Y<aX^3+bX^2+cX+d$

または $aX^3+bX^2+cX+d<Y<\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)X-\dfrac{b^3}{27a^2}+d$ のとき

【答】　㋒

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【解答】

$y'=3ax^2+2bx+c$ より接点を $(t,\ at^3+bt^2+ct+d)$ とすると，この点における接線は

$$y=(3at^2+2bt+c)(x-t)+at^3+bt^2+ct+d$$

ゆえに

$$y=(3at^2+2bt+c)x-2at^3-bt^2+d$$

となる．これが点 $(X,\ Y)$ を通るので

$$Y=(3at^2+2bt+c)X-2at^3-bt^2+d$$

この式を t に関して整理すると

$$2at^3+(b-3aX)t^2-2bXt+Y-cX-d=0$$

となり，求める接線の本数は，この t に関する３次方程式の異なる実数解の個数に一致する．

$$f(t)=2at^3+(b-3aX)t^2-2bXt+Y-cX-d$$

とおくと，

$$f'(t)=6at^2+2(b-3aX)t-2bX=2(3at+b)(t-X)$$

であるから

(Ⅰ)　$-\dfrac{b}{3a}=X$ のとき

常に $f'(t)\geqq 0$ または常に $f'(t)\leqq 0$ となるので，$f(t)=0$ の異なる実数解の個数は１

(Ⅱ)　$-\dfrac{b}{3a}\neq X$ のとき

$-\dfrac{b}{3a}$ と X のうち一方を α，他方を β としたとき，$f(t)$ の増減は

t	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↗		↘		↗

または

t	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘		↗		↘

となるので，

$f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)f(X)>0$ のとき，$f(t)=0$ の異なる実数解の個数は１

$f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)f(X)=0$ のとき，$f(t)=0$ の異なる実数解の個数は２

$f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)f(X)<0$ のとき，$f(t)=0$ の異なる実数解の個数は３

(Ⅰ)，(Ⅱ)と

$$f\left(-\frac{b}{3a}\right)f(X)=\left\{Y-\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)X+\frac{b^3}{27a^2}-d\right\}(Y-aX^3-bX^2-cX-d)$$

より，求める個数は

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$\begin{cases} 1 & : X = -\dfrac{b}{3a} \\ & \text{または「} Y > \left(c - \dfrac{b^2}{3a}\right)X - \dfrac{b^3}{27a^2} + d \text{ かつ } Y > aX^3 + bX^2 + cX + d \text{」} \\ & \text{または「} Y < \left(c - \dfrac{b^2}{3a}\right)X - \dfrac{b^3}{27a^2} + d \text{ かつ } Y < aX^3 + bX^2 + cX + d \text{」のとき} \\ 2 & : X \neq -\dfrac{b}{3a} \text{ かつ} \\ & \text{「} Y = \left(c - \dfrac{b^2}{3a}\right)X - \dfrac{b^3}{27a^2} + d \text{ または } Y = aX^3 + bX^2 + cX + d \text{」のとき} \\ 3 & : \left(c - \dfrac{b^2}{3a}\right)X - \dfrac{b^3}{27a^2} + d < Y < aX^3 + bX^2 + cX + d \\ & \text{または } aX^3 + bX^2 + cX + d < Y < \left(c - \dfrac{b^2}{3a}\right)X - \dfrac{b^3}{27a^2} + d \text{ のとき} \end{cases}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。